Concours Centrale - Supélec 1994

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Option TA

Ce problème a pour objectif l'étude des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\begin{cases} f(x+1) - f(x) = \varphi(x) & \text{pour tout } x > 0 \\ f(1) = \lambda \end{cases} \qquad (1)$$

où λ est un réel donné et $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction donnée.

Partie I -

On suppose dans cette partie que φ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et que : $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

I.A - On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n(p) = \varphi(n) - \varphi(n+p)$

Pour $N > p$, calculer $\sum_{n=1}^{N} u_n(p)$ et en déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$ donné.

Quelle est sa somme ?

I.B - On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n(x) = \varphi(n) - \varphi(n+x)$.

I.B.1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donné.

I.B.2) Montrer que cette convergence est normale sur tout intervalle $[0,p]$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné).

I.C - On suppose $x > 0$ et on pose : $f_0(x) = \lambda - \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(n) - \varphi(n+x)]$.

Montrer qu'on définit ainsi sur $]0,+\infty[$ une fonction croissante et vérifiant les relations (1).

I.D - Soit f une fonction croissante sur $]0,+\infty[$ et vérifiant les relations (1). On pose : $g = f - f_0$.

I.D.1) Établir que g est périodique.

I.D.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1]$, on a $|g(x)| \leq \varphi(n)$.

I.D.3) En déduire que f_0 est l'unique fonction croissante sur $]0,+\infty[$ et vérifiant les relations (1).

I.E - On suppose de plus, dans cette question, que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

I.E.1) Montrer que f_0 est continue sur $]0,+\infty[$.

I.E.2) Montrer que la fonction $f_0 + \varphi$ est prolongeable par continuité en 0.

Partie II -

On suppose dans cette partie que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, que φ' est décroissante sur $]0,+\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$.

II.A - Soit μ un réel donné. Montrer qu'il existe une unique fonction, notée g_μ, définie et croissante sur $]0,+\infty[$ et vérifiant les relations :

$$\begin{cases} g_\mu(x+1) - g_\mu(x) = \varphi'(x) & \text{pour tout } x > 0 \\ g_\mu(1) = \mu \end{cases} \qquad (2)$$

II.B - On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi'(n) - \varphi'(n+x)]$

Prouver que la fonction $x \mapsto \varphi(x+1) - \int_x^{x+1} h(t)\,dt$ est définie et constante sur $[0,+\infty[$.

II.C - Montrer qu'il existe une unique valeur μ_0 de μ et une unique primitive G_{μ_0} de g_{μ_0} sur $]0,+\infty[$ telles que G_{μ_0} vérifie les relations (1).

II.D - En déduire qu'il existe une unique fonction f_1 dérivable sur $]0,+\infty[$, vérifiant les relations (1) et telle que f'_1 soit croissante sur $]0,+\infty[$.

Donner, pour $x>0$, une expression de $f_1(x)$ à l'aide de λ, x, $\varphi(1)$, $\varphi(x)$, $\int_0^1 h(t)dt$ et $\int_0^x h(t)dt$.

II.E - Établir, pour $x>0$, les formules suivantes :

$$f'_1(x) = \varphi(1) - \varphi'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(n+1) - \varphi(n) - \varphi'(n+x)] \quad (3)$$

$$f_1(x) = \lambda + x\varphi(1) - \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(n) - \varphi(n+x) + x(\varphi(n+1) - \varphi(n))] \quad (4)$$

Partie III - Étude d'un cas particulier

III.A - Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right]$ converge. On notera C sa somme.

III.B - Montrer qu'il existe une unique fonction $\gamma :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \gamma(x+1) = x\gamma(x) & \text{pour tout } x>0 \\ \gamma(1) = 1 & \\ \gamma'/\gamma & \text{est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases} \quad (5)$$

III.C - Établir, pour tout $x>0$, les formules suivantes :

$$\ln\gamma(x) = -\ln x - Cx - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln((1+\frac{x}{n})e^{-x/n}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\gamma(x)} = xe^{Cx} \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} (1+\frac{x}{n})e^{-x/n} \quad (7)$$

$$\gamma(x) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N^x N!}{\prod_{n=0}^{N}(x+n)} \quad (8)$$

III.D - Prouver que la fonction $\ln\gamma$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et donner la valeur de ses deux premières dérivées sous forme de sommes de séries.

III.E - On considère la fonction Γ donnée par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

On admettra que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma^{(k)}(x)$ s'obtient en dérivant k fois par rapport à x sous le signe d'intégration.

III.E.1) Donner, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, l'expression de $\Gamma^{(k)}(x)$.

III.E.2) Montrer que $\gamma = \Gamma$.

••• FIN •••